UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

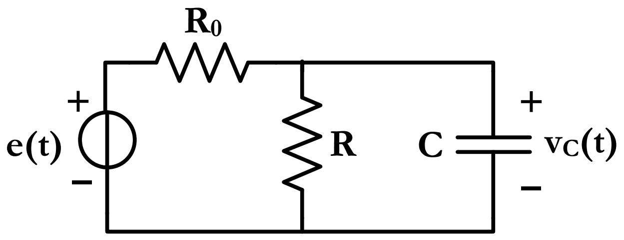
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA A-I, INGEGNERIA BIOMEDICA, INGEGNERIA PER LA GESTIONE DEI SISTEMI DI TRASPORTO

Prof. **Luigi Verolino**
Prova scritta del **20 Febbraio 2013**

Cognome:	**Matricola:**
Nome:	**Parametro** α **(**ultima cifra non nulla della matricola**):**

ESERCIZIO 1



$$e(t) = \begin{cases} E\sin(\omega_1 t) & t \le 0 \\ E\sin(\omega_2 t) & t > 0 \end{cases}$$

$E = 60\,\alpha$

$\omega_1 = 3$ krad/s; $\omega_2 = 6$ krad/s

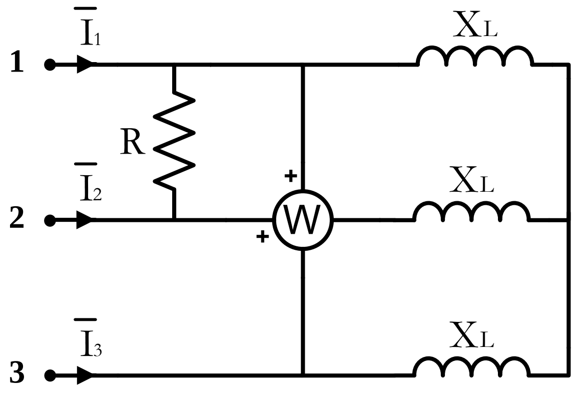
$R_0 = 2R$; $R = 2\alpha$

$C = \dfrac{1}{4\alpha}$ mF

Per la rete mostrata in figura, si determini:

la tensione $v_C(t)$ in ogni istante di tempo.

ESERCIZIO 2



$\bar{V}_{12} = V_0\, e^{j\frac{\pi}{6}}$

$V_0 = 400\sqrt{3}\alpha$

$R = 60$

$X_L = 20\alpha$

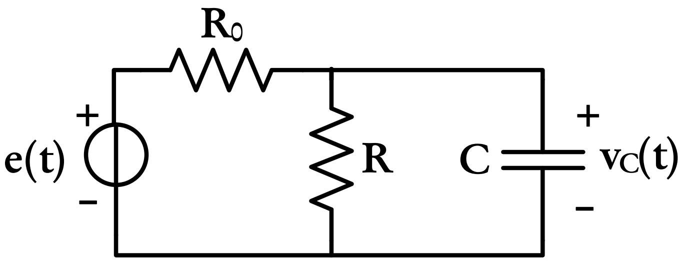
La terna di alimentazione è simmetrica.

Per la rete trifase mostrata in figura, determinare la lettura del wattmetro.

Prova scritta del **20 Febbraio 2013**

ESERCIZIO 1

Per la rete mostrata in figura, si determini la tensione ai capi del condensatore in ogni istante di tempo:



$$e(t) = \begin{cases} E\sin(\omega_1 t) & t \le 0 \\ E\sin(\omega_2 t) & t > 0 \end{cases}$$

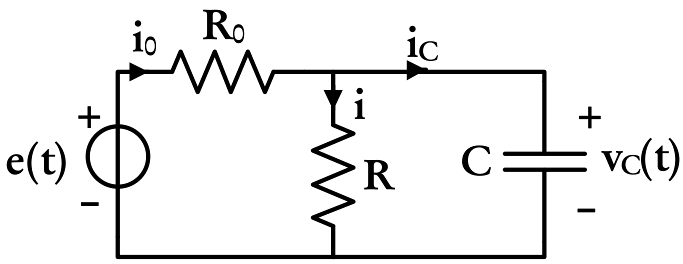
$E = 60\ \alpha$

$\omega_1 = 3$ krad/s; $\omega_2 = 6$ krad/s

$R_0 = 2R$; $\quad R = 2\alpha$

$C = \dfrac{1}{4\alpha}$ mF

Svolgimento



Per $t \le 0$ la rete opera in regime sinusoidale. Utilizzando il metodo dei fasori si può ricavare l'andamento della tensione v_C. Una volta trovata l'espressione di v_C, valida per $t \le 0$, ponendo in essa $t = 0$, si ricava la condizione iniziale per la tensione che servirà per risolvere il transitorio.

$$e(t) = E\,sin(\omega_1 t) \;\Rightarrow\; \bar{E} = E.$$

La tensione ai capi del condensatore, coincidente con quella ai capi del parallelo formato da R e -jX_C, si ottiene utilizzando la regola del partitore di tensione:

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{E}}{R_0 + R//(-jX_C)} R//(-jX_C) = \frac{-j\bar{E}RX_C}{RR_0 - jR_0X_C - jRX_C} =$$

$$= \frac{-jE}{R_0\omega_1 C - j\frac{R_0}{R} - j} = 10\,\alpha\,(1 - j) = [10\sqrt{2}\,\alpha, -\frac{\pi}{4}].$$

Ritornando nel dominio del tempo, si può scrivere

$$v_C(t) = 10\sqrt{2}\,\alpha\,sen\,(\,\omega_1\,t - \tfrac{\pi}{4})\,.$$

La condizione iniziale si ottiene ponendo $t = 0$ nella precedente:

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = -10\alpha.$$

Per $t > 0$ le LK impongono che

$$\begin{cases} i_0 = i_C + i, \\ R_0\, i_0 + R\, i = e, \\ v_C = R\, i. \end{cases}$$

Introducendo la relazione costitutiva del condensatore, si ottiene

$$\begin{cases} i_0 = C\,\dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{v_C}{R}, \\ R_0\, i_0 + v_C = e. \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda, riordinando l'equazione, ed aggiungendo la condizione iniziale trovata in precedenza, si ottiene il problema di Cauchy da risolvere:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{R + R_0}{RR_0C}\, v_C = \dfrac{e}{R_0C}, \\ \\ v_C(0) = -10\alpha. \end{cases}$$

Ricordando che $R_0 = 2R$, il sistema diventa

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{3}{2RC}\, v_C = \dfrac{e}{R_0C}, \\ \\ v_C(0) = -10\alpha. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell' equazione omogenea associata è

$$\lambda + \frac{3}{2RC} = 0,$$

il cui unico autovalore è

$$\lambda = -\frac{3}{2RC}.$$

L'integrale generale dell'omogenea associata assume la forma

$$v_{C,0} = K\, e^{\lambda t}.$$

L'integrale particolare dell'equazione completa si può ottenere passando al dominio dei fasori e risolvendo la rete per $t > 0$ come se fosse in regime sinusoidale. In tal modo si ricava molto semplicemente l'espressione del fasore $\overline{V}_{C,p}$ che, anti-trasformato, ci darà l'espressione nel dominio del tempo dell'integrale particolare dell'equazione differenziale completa.
Poiché la rete è identica a quella già risolta per $t \leq 0$, l'espressione di $\overline{V}_{C,p}$ è data da

$$\bar{V}_{C,p} = \frac{\bar{E}}{R_0 + R//(-jX_C)}\, R//(-jX_C) = \frac{-j\bar{E}RX_C}{RR_0 - jR_0X_C - jRX_C}.$$

Da cui, ricordando che per t > 0 la pulsazione del generatore è $_2$, si ricava immediatamente

$$\bar{V}_{C,p} = \frac{-jE}{R_0\omega_1 C - j\frac{R_0}{R} - j} = 4\,\alpha\,(1 - 2j).$$

Ritornando nel dominio del tempo, si ha:

$$v_{C,p} = 4\alpha\, sen\,(\,\omega_2\, t\,) - 8\alpha\, cos\,(\,\omega_2\, t\,).$$

L'integrale generale dell'equazione completa è

$$v_C = K\, e^{\lambda t} + 4\alpha\, sen\,(\,\omega_2\, t\,) - 8\alpha\, cos\,(\,\omega_2\, t\,).$$

Forzando la condizione iniziale, si ottiene

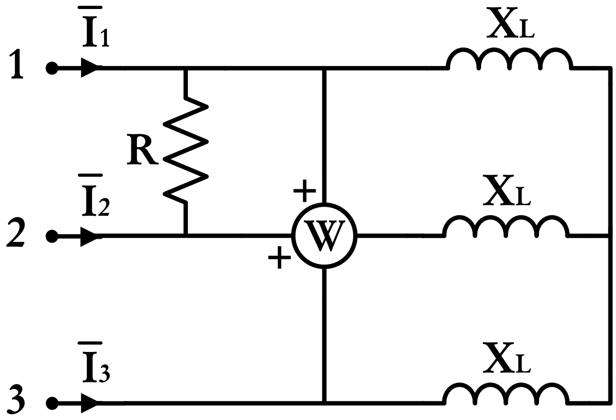
$$K = -2\,\alpha.$$

Quindi, l'andamento della tensione è capi del condensatore, in ogni istante di tempo, è dato da

$$\begin{cases} v_C(t) = 10\sqrt{2}\,\alpha\, sen\left(\omega_1\, t - \frac{\pi}{4}\right) & t < 0, \\ v_C(t) = 2\alpha\,[\,-e^{-1000\,t} + 2\, sen\,(\,\omega_2\, t\,) - 4\, cos\,(\,\omega_2\, t\,)] & t \geq 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

Per la rete trifase mostrata in figura, determinare la lettura del wattmetro.



$\overline{V}_{12} = V_0\, e^{j\frac{\pi}{6}}$

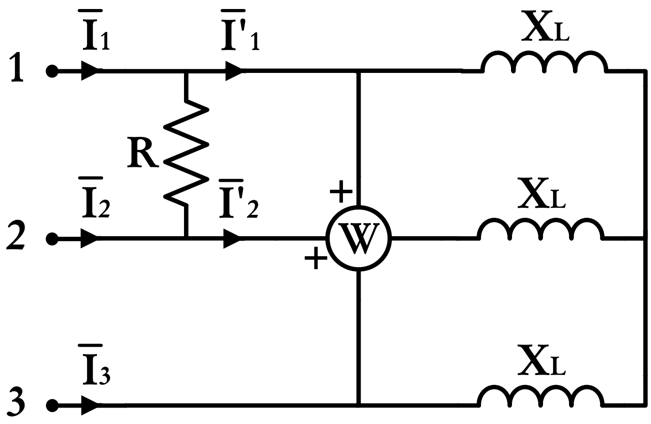
$V_0 = 400\,\sqrt{3\alpha}$

$R = 60$

$X_L = 20\alpha$

La terna di alimentazione è simmetrica.

Svolgimento



A valle del resistore R, il carico è equilibrato e possiamo scrivere

$$\bar{I'}_1 = \frac{\bar{E}_1}{jX_L}, \qquad \bar{I'}_2 = \frac{\bar{E}_2}{jX_L}, \qquad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{jX_L},$$

con

$$\bar{E}_1 = \frac{\bar{V}_{12}}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{6}j} = 400\,\sqrt{\alpha}, \qquad \bar{E}_2 = \bar{E}_1 e^{-\frac{2\pi}{3}j}, \qquad \bar{E}_3 = \bar{E}_1 e^{-\frac{4\pi}{3}j}\,.$$

La corrente misurata dall'amperometrica del wattmetro vale

$$\bar{I'}_2 = \frac{\bar{E}_2}{jX_L} = \frac{V_0}{\sqrt{3}X_L} e^{\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)j} = \frac{V_0}{\sqrt{3}X_L} e^{-\frac{7\pi}{6}j}.$$

La tensione misurata dalla voltmetrica del wattmetro vale

$$\bar{V}_{13} = \bar{V}_{31} e^{\pi j} = \bar{V}_{12} e^{\left(-\frac{4\pi}{3}+\pi\right)j} = V_0 e^{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}+\pi\right)j} = V_0 e^{-\frac{\pi}{6}j}.$$

La potenza misurata dal wattmetro si ottiene come

$$P_W = Re\{\bar{V}_{13} \cdot \bar{I'}_2{}^*\} = Re\left\{V_0 e^{-\frac{\pi}{6}j} \cdot \frac{V_0}{\sqrt{3}X_L} e^{\frac{7\pi}{6}j}\right\} = Re\left\{\frac{{V_0}^2}{\sqrt{3}X_L} e^{\pi j}\right\} = -\frac{{V_0}^2}{\sqrt{3}X_L}$$

$$= -8000\sqrt{3}$$